== 三角形の面積 ==

(I) 三角形の面積（小学校で習う基本公式）

右図1のような三角形の面積は、いずれも
（底辺）×（高さ）÷2
で求められます。
次のように分数の形で書くこともできます。

$$（面積）=\frac{（底辺）\times（高さ）}{2}$$

(1) 2で割ることを忘れる答案が多いので注意しましょう。
右図2の三角形の面積は、$4\times 3=12$ ではなく、
$4\times 3\div 2=6$ になります。

(2) 高さは必ず底辺に垂直（直角）な線で測らなければなりません。
右図3の三角形ABCで、底辺BCに対する高さは6になりますから、面積は$5\times 6\div 2=15$ になります。

(3) 見かけ上は複雑な図形でも「三角形の面積を引く」と面積が簡単に求まることがあります。
右図4の多角形$ABCDE$は長方形$ABCF$から三角形DFEを取り除いたものになっているから、その面積を求めるには：
長方形$ABCF$の面積$4\times 5=20$ から
三角形DFEの面積$3\times 4\div 2=6$ を引いて
14 になります。

右図5の三角形ABCは正方形から3個の三角形を取り除いたものだから、その面積は$16-(2+4+4)=6$ になります。

右図6の凹四角形$ABCD$は三角形ABDから三角形BDCを取り除いたものだから、その面積は
$\frac{6\cdot 4}{2}-\frac{6\cdot 2}{2}=12-6=6$ になります。

(4) 縮尺図を用いて表しているときに実際の図形の面積を求めるには、各辺の実際の長さを求めてから計算しなければなりません。
右図7は実際の地形で500(m)に相当する長さを1(cm)で表した設計図だとします。このとき、実際の地形で三角形ABCの面積を求めるには：
$BD=3\times 500=1500$（m）
$AC=4\times 500=2000$（m）
三角形ABCの面積は
$1500\times 2000\div 2=1500000$（$m^2$）になります。

(5) 面積と底辺が分かれば高さを求めることができます。

$$（面積）=\frac{（底辺）\times（高さ）}{2}$$

$$\rightarrow（高さ）=\frac{2\times（面積）}{（底辺）}$$

同様にして、面積と高さから底辺を計算することもできます。

$$\rightarrow（底辺）=\frac{2\times（面積）}{（高さ）}$$

右図8において三角形ABCの面積は
$9\times 12\div 2=54$ です。
一方で、ACを底辺と見ると、三角形ABCは面積と底辺が分かっていることになり、
$54=15\times BD\div 2$ より$BD=7.2$

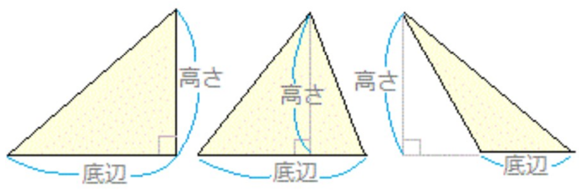
図1


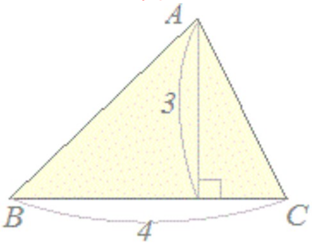
図2


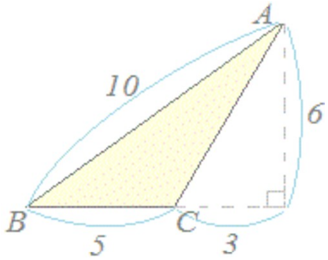
図3


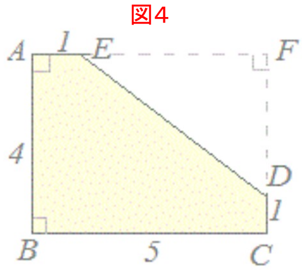
図4


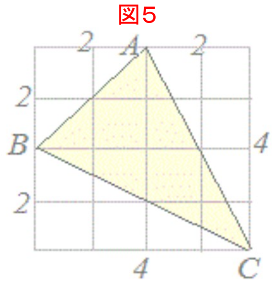
図5


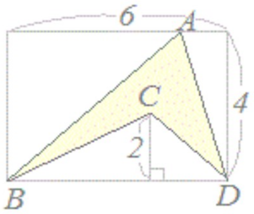
図6


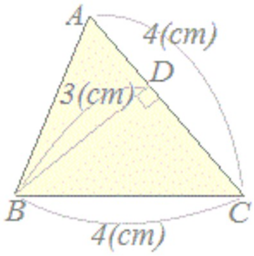
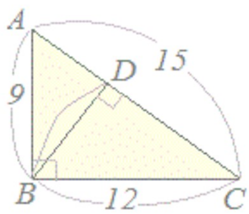
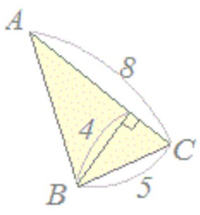
図7


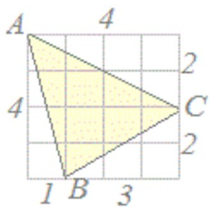
図8


≪問題１≫　各々正しいものを選択肢から選んでください。



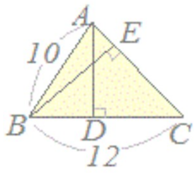
(1)　左の$\triangle ABC$の面積は

$10 \quad 16 \quad 20 \quad 32 \quad 40$



(2)　左の$\triangle ABC$の面積は

$2 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 12$



(3)　左の$\triangle ABC$の面積が48であるとき、ADの長さは

$6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14$

(1)底辺と高さが垂直（直角）になっている組を考えます：8と4
次に、底辺×高さ÷2を考えます：$8\times4\div2=16$
（5という数字は答に影響していません。）
(2)外側の正方形の面積は16
3つの三角形の面積は各々2，3，4
正方形の面積から3つの三角形の面積を引くと$16-(2+3+4)=7$

(3)$AD\perp BC$だからBCが底辺でADが高さと考えます。
$AD\times12\div2=48$だから$AD=8$

(II) 三角形の面積の比

三角形の面積は
（底辺）×（高さ）÷２
で求められますので、（底辺）の長さが等しい2つの三角形の面積の比は（高さ）の比に等しくなります。

（高さ）が等しい2つの三角形の面積の比は（底辺）の比に等しくなります。

右図9において三角形ABCとBCDとは、底辺BCの長さが等しいから、
$\triangle ABC=BC\times5\div2$
$\triangle BCD=BC\times3\div2$
それらの面積の比は、$\triangle ABC:\triangle BCD=5:3$になります。
（BCの長さが書いてなくても、面積の比は求められます。）

右図10において三角形ABCとCDAとは、高さhが等しいから、
$\triangle ABC=4\times h\div2$
$\triangle CDA=7\times h\div2$
それらの面積の比は、$\triangle ABC:\triangle CDA=4:7$になります。
（高さhが書いてなくても、面積の比は求められます。）

右図11において$ABCD$はAD/BCの台形とする。このとき、三角形ABDとBCDとは、高さが等しいから面積の比は底辺の比に等しく、$3:5$になります。

右図12において$ABCD$はAD/BCの台形とする。このとき、三角形ABCとBCDとは、底辺が共通で高さが等しいから面積が等しい。次に、共通に含まれる三角形BCEを取り除くと、三角形ABEの面積と三角形CDEの面積は等しくなります。

これらの面積が等しいのは、AD/BCのためであり、ABとDCは平行でないから、三角形AEDの面積と三角形BCEの面積は等しくない（$AD\neq BC$である限り、等しいとは限らない）。

図9

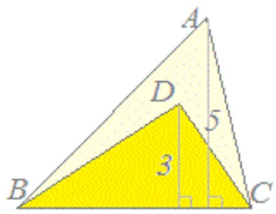


図10

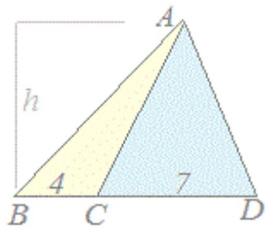


図11

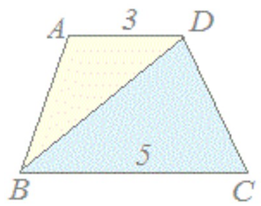
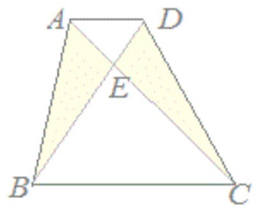


図12



(III) 斜辺の比と高さの比

右図13のように、2つの三角形の辺が1つの斜辺上にあるとき、これらの三角形の高さの比は斜辺の長さの比に等しくなります。

右図13において$\triangle BED$と$\triangle BFA$は相似だから、
$AF:DE=AB:DB$

図13

右図14において$\triangle DEG$と$\triangle DFA$は相似だから、
$AF:GE=AD:GD$

この性質により三角形の面積比について、次のことがいえます。

右図13において$\triangle BCD$と$\triangle BCA$は、底辺が共通だからそれらの面積比は高さの比に等しく、$DB:AB$に等しい。

右図14において$\triangle BCG$と$\triangle BCA$は、底辺が共通だからそれらの面積比は高さの比に等しく、$GD:AD$に等しい。

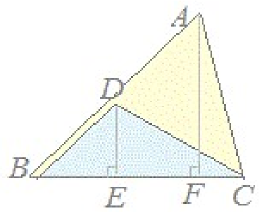
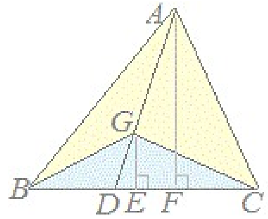
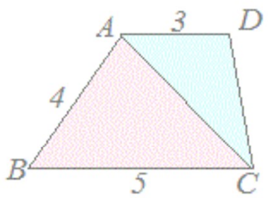


図14



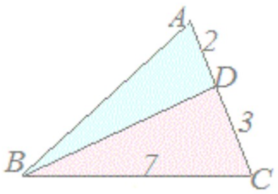
≪問題2≫　各々正しいものを選択肢から選んでください。



(1)　左図において四角形$ABCD$が$AD//BC$となる台形であるとき、三角形ADCと三角形ABCの面積比を求めてください。

$\triangle ADC:\triangle ABC=$

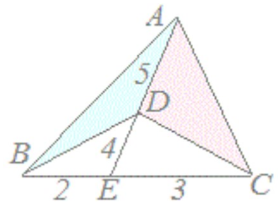
$3:4$　$3:5$　$3:7$　$4:15$　$5:7$



(2)　左図において$\triangle ABD$と$\triangle BCD$の面積比を求めてください。

$\triangle ABD:\triangle BCD=$

$1:3$　$2:3$　$3:5$　$5:7$　$6:7$



(3)　左図において$\triangle ABD$と$\triangle CAD$の面積比を求めてください。

$\triangle ABD:\triangle CAD=$

$2:3$　$3:4$　$4:5$　$5:6$　$8:15$

(4)三角形ADCと三角形ABCの高さは等しいから、面積比は底辺の長さの比$3:5$に等しくなります。

(5)ADとDCを底辺と見ると高さが等しいことになります。底辺の長さの比から$2:3$

(6)（速攻の答案）
底辺ADが共通で高さの比は斜辺の比$BE:EC$に等しいから、面積比は$BE:EC=2:3$

（着実な答案）$\triangle ABD:\triangle BED=5:4$だから

$$\triangle BED=\frac{4}{5}\triangle ABD$$

同様にして$\triangle CDE=\frac{3}{2}\triangle BED$, $\triangle CAD=\frac{5}{4}\triangle CDE$

ゆえに　$\triangle CAD=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\triangle ABD=\frac{3}{2}\triangle ABD$

$$\triangle ABD:\triangle CAD=2:3$$

(IV) 1つの角が共通であるときの三角形の面積の比

右図15のように、2つの三角形について1つの角が共通であるとき、これらの三角形の面積の比は共通な角を挟む2辺の積の比になります。

右図15において$\triangle BED$と$\triangle BCA$の底辺（BC上にとるものとする）の比は、$3:7$
また、高さの比は$2:5$だから
$\triangle BED$と$\triangle BCA$の面積の比は$3\cdot 2:7\cdot 5=6:35$
（$\triangle BED$や$\triangle BCA$の面積が6と35になるということではない。それらの比が求まるということ。）

右図16において$\triangle BCE$と$\triangle ACD$の底辺の比は、$13:7$、高さの比は$3:5$だから、$\triangle BCE$と$\triangle ACD$の面積の比は$39:35$

図15

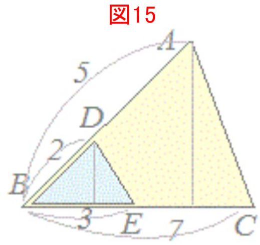
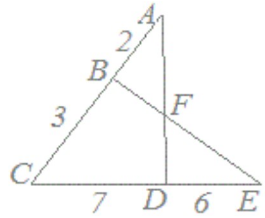
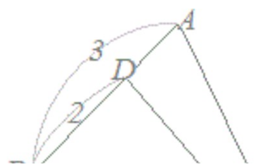


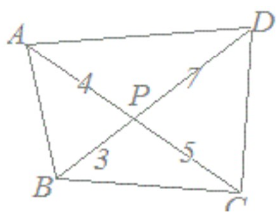
図16



≪問題3≫　各々正しいものを選択肢から選んでください。



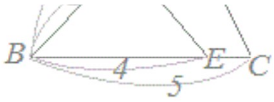
(1)　左図において三角形DBEと三角形ABCの面積比を求めてください。



(3)　左図において$\triangle ABP$と$\triangle CDP$の面積比を求めてください。

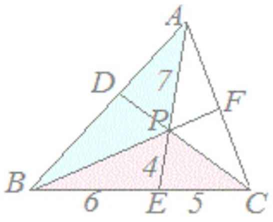
$\triangle ABP:\triangle CDP=$

$3:7$　$4:5$　$7:12$　$12:35$　$15:28$



$\triangle DBE:\triangle ABC=$

$2:3$　$3:4$　$3:10$　$4:5$　$8:15$



(2)　左図において$\triangle ABP$と$\triangle BCP$の面積比を求めてください。

$\triangle ABP:\triangle BCP=$

$6:5$　$7:4$　$7:11$

$21:10$　$21:22$

(7)三角形DBEと三角形ABCの底辺の比は$4:5$

高さの比（斜辺の比）は$2:3$

面積比は$8:15$

(8)

$\triangle ABP=\frac{7}{4}\triangle BEP$

$\triangle BEP=\frac{6}{11}\triangle BCP$

ゆえに

$\triangle ABP=\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{11}\triangle BCP=\frac{21}{22}\triangle BCP$

$\triangle ABP:\triangle BCP=21:22$

(9)$\triangle ABP=\frac{4}{5}\triangle BCP$

$\triangle BCP=\frac{3}{7}\triangle CDP$

ゆえに

$\triangle ABP=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}\triangle CDP=\frac{12}{35}\triangle CDP$

$\triangle ABP:\triangle CDP=12:35$