== 面積の比 ==

○1　2つの三角形の高さが等しいときは，面積の比は底辺の長さの比に等しい．

三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の△ABC と△ABD の面積は各々

$$\triangle ABC=\frac{BC\cdot h}{2}$$
$$\triangle ABD=\frac{BD\cdot h}{2}$$

※　辺BC の長さをBC と書く．文字式の計算としてB とC を掛けているわけではない．BD も辺の長さを表す記号．
※　式の中で△ABC と書いたときは△ABC の面積を表す．

ここで $BC:BD=a:b$ ならば

$$\triangle ABC:\triangle ABD=\frac{BC\cdot h}{2}:\frac{BD\cdot h}{2}=BC:BD=a:b$$

となって，△ABC と△ABD との面積比は底辺の長さの比に等しくなる．

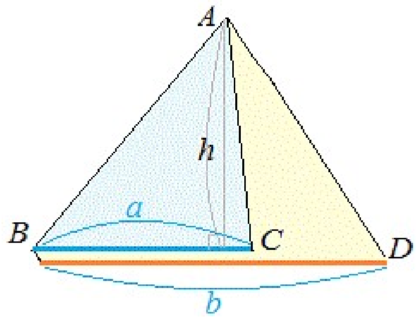


図1

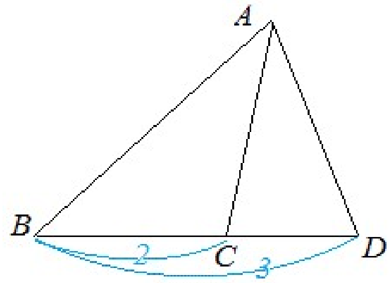


図2

例1
右図2において△ABC と△ABD の高さは等しいから，

$\triangle ABC:\triangle ABD=2:3$
$\triangle ABC:\triangle ACD=2:1$

○2　2つの三角形の底辺の長さが等しいときは，面積の比は高さの比に等しい．
○3　高さが書いていないときでも，1組の辺の比が$m:n$ のときは，高さが$m:n$ と考えてよい．

○2の証明
三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の△FBC と△ABC の面積は各々

$$\triangle FBC=\frac{BC\cdot FD}{2}$$
$$\triangle ABC=\frac{BC\cdot AE}{2}$$

ここで底辺 BC は共通だから

$$\triangle FBC:\triangle ABC=\frac{BC\cdot FD}{2}:\frac{BC\cdot AE}{2}=FD:AE$$

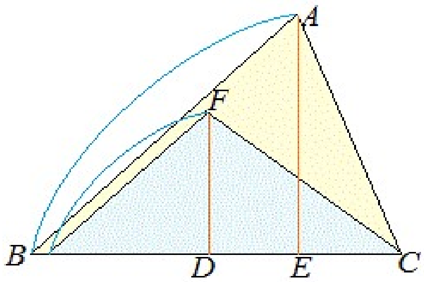


図3

○3の証明
右図3の△FBD と△ABE は相似図形だから，

$FD:AE=FB:AB$
したがって $\triangle FBC:\triangle ABC=FD:AE=FB:AB$

（○3は，FB とAB を底辺と考えると○1と同じ内容になる．）

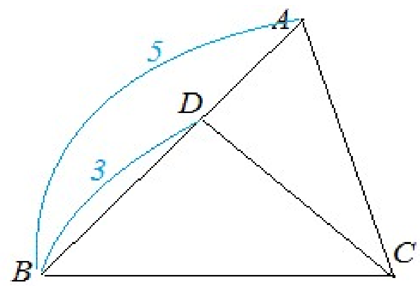


図4

例2
右図4において△DBC と△ABC の底辺BC は共通だから，

$\triangle DBC:\triangle ABC=3:5$
$\triangle DBC:\triangle ADC=3:2$

○4　2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる.
○5　右図6のように2つの三角形で1つの角が共通のとき，この角をはさむ2辺の比が各々$a:b$，$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる.

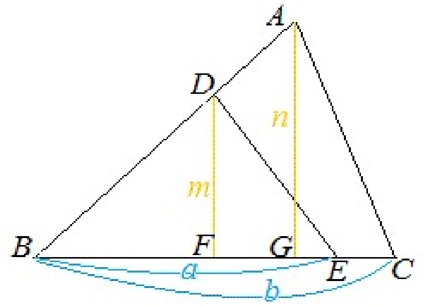


図5

○4の証明

$$\triangle DBE = \frac{BE \cdot DF}{2}$$
$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot AG}{2}$$

だから $\triangle DBE : \triangle ABC = \frac{am}{2} : \frac{bn}{2} = am : bn$

○5の証明
右図6においては○3と同様に高さの比が$m:n$ になるから，
$\triangle DBE : \triangle ABC = am : bn$

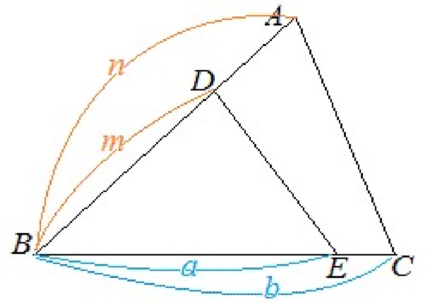


図6

例3
右図7において

$\triangle DBE : \triangle ABC = 8:15$
$\triangle DBE$:(四角形)$ADEC = 8:(15-8) = 8:7$

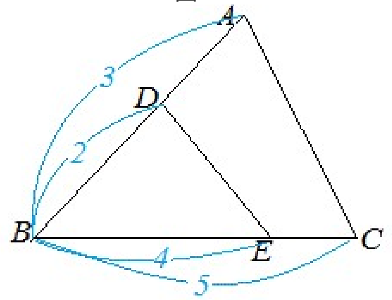


図7

○6　相似比が$a:b$ となる2つの三角形の面積の比は$a^2:b^2$ になる.

○6の証明
○5において底辺の比も高さの比も$a:b$ になるから，
$\triangle DBE : \triangle ABC = aa : bb = a^2 : b^2$

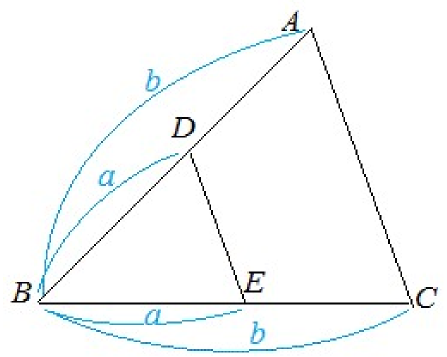
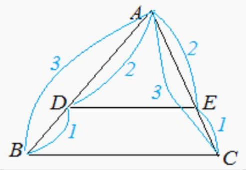


図8

例4
右図において
$\triangle ADE : \triangle ABC = 4:9$
$\triangle ADE$:(四角形)$DBCE = 4:(9-4) = 4:5$



【まとめ】
(1) 右図9ののように2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる.（右の図9では高さの比を$m:n$ と読む.）

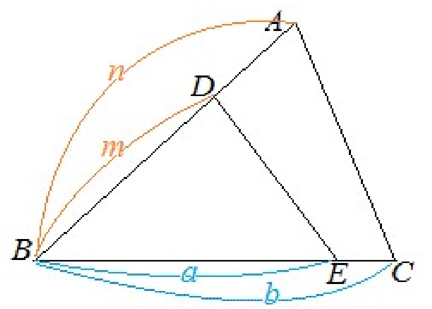


図9

(2) 右図10のような図形において，3つ以上の三角形の面積を比較するときは，次のように「比の値」を「分数」にすると簡単にできる.

$$\frac{\triangle BEP}{\triangle CEP} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\triangle CEP}{\triangle CAP} = \frac{4}{5}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle BEP}{\cancel{\triangle CEP}} \frac{\cancel{\triangle CEP}}{\triangle CAP} = \frac{2}{3}\ \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$\triangle BEP : \triangle CAP = 8:15$

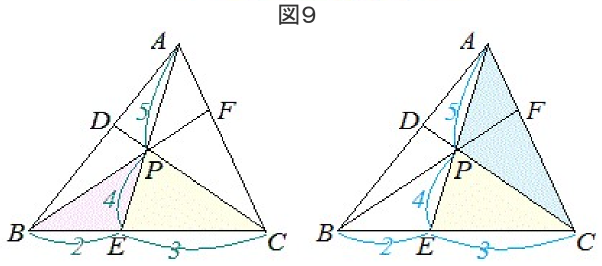


図10

例題1

右図11において

(1)　$\triangle BEP:\triangle CEP=6:5$

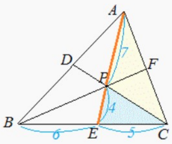
　　高さが等しく，底辺が6:5と見る

(2)　$\triangle ABC:\triangle PBC=11:4$

　　底辺が等しく，高さが11:4と見る

(3)　$\triangle APC:\triangle PEC=7:4$

　　右図のようにAP，PE を底辺とみると，高さが等しく，底辺が7:4



(4)　$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPE}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{\triangle BPE}{\triangle BPC}=\frac{6}{11}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPE}}\frac{\cancel{\triangle BPE}}{\triangle BPC}=\frac{7}{4}\frac{6}{11}=\frac{42}{44}=\frac{21}{22}$$

$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

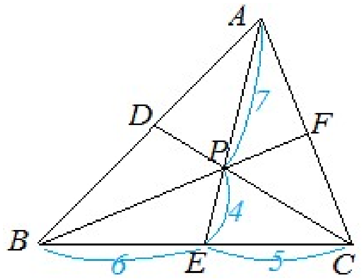


図11

例題2

右図12において

(1)　$\triangle APB:\triangle BPC=4:5$

　　高さが等しく，底辺が4:5と見る

(2)　$\triangle BPC:\triangle CPD=3:7$

　　高さが等しく，底辺が3:7と見る

(3)　$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPC}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\triangle BPC}{\triangle CPD}=\frac{3}{7}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPC}}\frac{\cancel{\triangle BPC}}{\triangle CPD}=\frac{4}{5}\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$$

$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

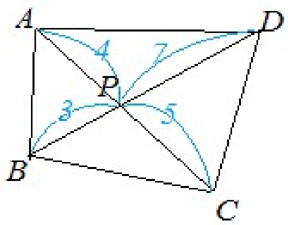


図12

例題3

右図13の平行四辺形$ABCD$ において

(1)　$\triangle ABQ \backsim \triangle FDQ$（相似比は9:3=3:1）だから

　　$\triangle ABQ:\triangle FDQ=3^2:1^2=9:1$

　　$\triangle ABP:\triangle ABQ=4:9$（高さが等しく底辺が4:9）

　　ゆえに $\triangle ABP:\triangle FDQ=4:1$

(2)　$\triangle BEP \backsim \triangle ADP$（相似比は4:8=1:2）だから

　　$\triangle BEP:\triangle ADP=1:4$

　　$\triangle APQ:\triangle APD=5:8$（高さが等しく底辺が5:8）

　　ゆえに

　　$\triangle BEP:\triangle APQ=\frac{1}{4}:\frac{5}{8}=2:5$

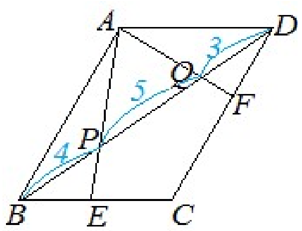


図13

例題4

右図14の平行四辺形$ABCD$ において

(1)

　$\triangle APE \backsim \triangle CPB$（相似比は $AP:PC=2:7$）

　$EP:PB=2:7$

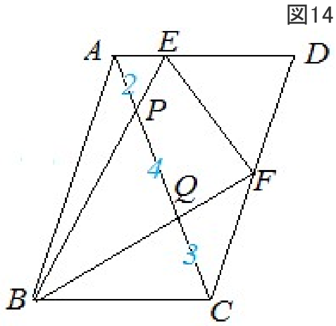
　$\triangle APE$ と$\triangle APB$ は高さが等しく底辺が $2:7$

　　$\triangle APE:\triangle APB=2:7$

(2)

$$\frac{\triangle APE}{\triangle CPB}=\frac{4}{49}$$ ← 相似比2:7の相似図形

図14



(2)の別解

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}=\frac{2}{7}$$ ←(1)の結果

$$\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ ← 高さが等しく底辺が2:4

ゆえに

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{7}\frac{1}{2}=\frac{1}{7}$$

$\dfrac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\dfrac{7}{4}$ ← 高さが等しく底辺が7:4

ゆえに

$\dfrac{\triangle APE}{\triangle CPB}\dfrac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\dfrac{4}{49}\ \dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{7}$

だから

$\triangle APE : \triangle QPB = 1 : 7$

(3)

$\triangle BQA \backsim \triangle FQC$

だから $BQ:QF=AQ:QC=6:3=2:1$

$\triangle CQB$ と$\triangle FQC$ は高さが等しく底辺が $2:1$

$\triangle CQB : \triangle FQC = 2 : 1$

(4)

$\triangle CQF : \triangle FED = 7 : 15$

(5)

$\triangle BQP : \triangle DEF = 56 : 45$

(5)の証明

$\dfrac{\triangle BQP}{\triangle ABC}=\dfrac{4}{9}$ ←【まとめ】

$\dfrac{\triangle DAC}{\triangle DEF}=\dfrac{14}{5}$ ←【まとめ】

$AP:PC=2:7$ だから$AE:BC=2:7$

したがって$AE:ED=2:5$

$AQ:QC=6:3$ だから$AB:CF=6:3$

したがって$CD:CF=6:3$, $CF:FD=3:3=1:1$

$\triangle ABC = \triangle CAD$ ←平行四辺形だから

ゆえに

$\dfrac{\triangle BQP}{\triangle CAD}\dfrac{\triangle CAD}{\triangle DEF}=\dfrac{4}{9}\ \dfrac{14}{5}=\dfrac{56}{45}$

だから

$\triangle APE : \triangle QPB = 1 : 7$

(4)の証明

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$ だから

$AE:CB=AP:CP=2:7$

$AE:DA=2:7$ (←平行四辺形だから)

$AE:ED=2:5$

$\triangle AQB \backsim \triangle CQF$ だから

$AB:CF=AQ:QC=6:3=2:1$

$DC:CF=2:1$ (←平行四辺形だから)

$CF:FD=1:1$

$\dfrac{\triangle CQF}{\triangle CAD}=\dfrac{3}{18}$ ←【まとめ】

$\dfrac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\dfrac{14}{5}$ ←【まとめ】

ゆえに

$\dfrac{\triangle CQF}{\triangle CAD}\dfrac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\dfrac{3}{18}\ \dfrac{14}{5}=\dfrac{7}{15}$

だから

$\triangle CQF : \triangle FED = 7 : 15$

問題1

右図の$\triangle ABC$ において

(1) $\triangle BEP : \triangle CEP=$ ___ : ___

採点する やり直す

(2) $\triangle ABC : \triangle PBC=$ ___ : ___

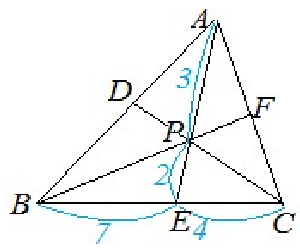
採点する やり直す

(3) $\triangle APC : \triangle PEC=$ ___ : ___

採点する やり直す

(4) $\triangle BCP : \triangle CAP=$ ___ : ___

採点する やり直す



問題2

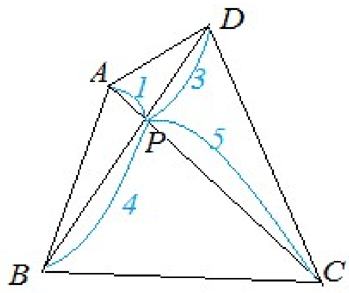
右図の四角形$ABCD$ において対角線 AC , BD の交点を P とする. $AP:PC=1:5$, $BP:PD=4:3$ のとき次の面積比を求めなさい.

(1) $\triangle APB : \triangle CPD=$ ___ : ___

採点する やり直す

(2) $\triangle APD : \triangle CPB=$ ___ : ___

採点する やり直す



問題３

右図の平行四辺形$ABCD$ において対角線 AC を $4:5:6$ に分ける点を順に P , Q とするとき，次の面積比を求めなさい．

(1) $\triangle EPA:\triangle DPC=$ ___ : ___

採点する やり直す

(2) $\triangle EPA:\triangle DPQ=$ ___ : ___

採点する やり直す

(3) $\triangle CQF:\triangle PQD=$ ___ : ___

採点する やり直す