== 面積の比 ==

○1　2つの三角形の高さが等しいときは，面積の比は底辺の長さの比に等しい．

三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の△ABC と△ABD の面積は各々

$$\triangle ABC=\frac{BC\cdot h}{2}$$

$$\triangle ABD=\frac{BD\cdot h}{2}$$

ここで $BC{:}BD=a{:}b$ ならば

$$\triangle ABC:\triangle ABD=\frac{BC\cdot h}{2}:\frac{BD\cdot h}{2}=BC{:}BD=a{:}b$$

となって，△ABC と△ABD との面積比は底辺の長さの比に等しくなる．

※　辺BC の長さをBC と書く．文字式の計算としてB とC を掛けているわけではない．BD も辺の長さを表す記号．
※　式の中で△ABC と書いたときは△ABC の面積を表す．

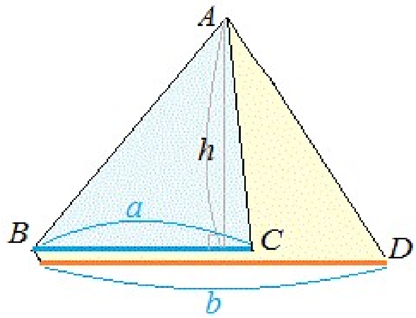


図1

例1
右図2において△ABC と△ABD の高さは等しいから，

$\triangle ABC:\triangle ABD=2{:}3$
$\triangle ABC:\triangle ACD=2{:}1$

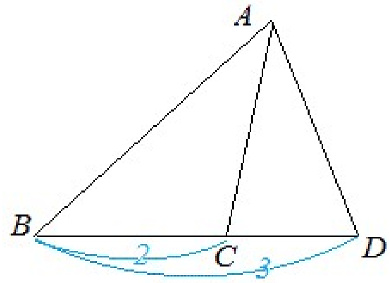


図2

○2　2つの三角形の底辺の長さが等しいときは，面積の比は高さの比に等しい．
○3　高さが書いていないときでも，1組の辺の比が$m{:}n$ のときは，高さが$m{:}n$ と考えてよい．

○2の証明
三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の△FBC と△ABC の面積は各々

$$\triangle FBC=\frac{BC\cdot FD}{2}$$

$$\triangle ABC=\frac{BC\cdot AE}{2}$$

ここで底辺 BC は共通だから

$$\triangle FBC:\triangle ABC=\frac{BC\cdot FD}{2}:\frac{BC\cdot AE}{2}=FD:AE$$

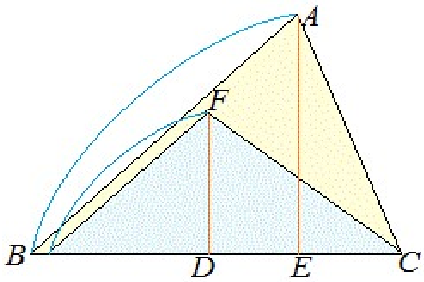


図3

○3の証明
右図3の△FBD と△ABE は相似図形だから，

$FD{:}AE=FB{:}AB$
したがって $\triangle FBC:\triangle ABC=FD:AE=FB:AB$

（○3は，FB とAB を底辺と考えると○1と同じ内容になる．）

例2
右図4において△DBC と△ABC の底辺BC は共通だから，

$\triangle DBC:\triangle ABC=3{:}5$
$\triangle DBC:\triangle ADC=3{:}2$

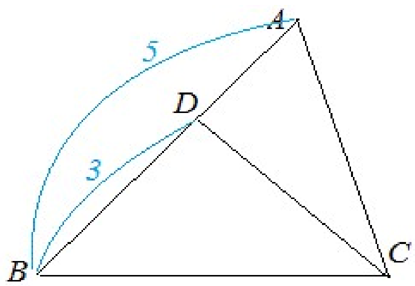


図4

○4　2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．
○5　右図6のように2つの三角形で1つの角が共通のとき，この角をはさむ2辺の比が各々$a:b$，$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．

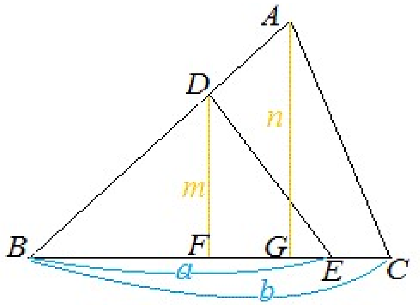


図5

○4の証明

$$\triangle DBE=\frac{BE\cdot DF}{2}$$
$$\triangle ABC=\frac{BC\cdot AG}{2}$$

だから $\triangle DBE:\triangle ABC=\frac{am}{2}:\frac{bn}{2}=am:bn$

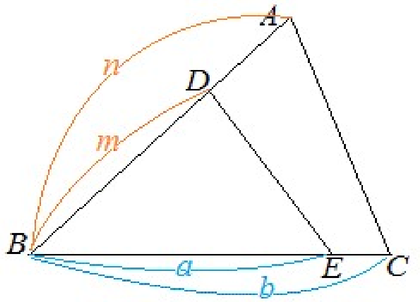


図6

○5の証明
右図6においては○3と同様に高さの比が$m:n$ になるから，
$\triangle DBE:\triangle ABC=am:bn$

例3
右図7において

$\triangle DBE:\triangle ABC=8:15$
$\triangle DBE$:(四角形)$ADEC=8:(15\text{-}8)=8:7$

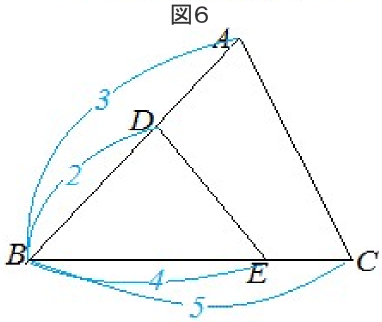


図7

○6　相似比が$a:b$ となる2つの三角形の面積の比は$a^2:b^2$ になる．

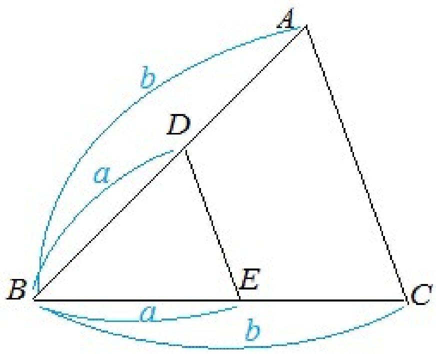
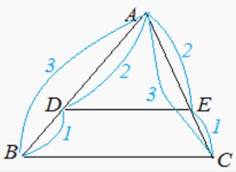


図8

○6の証明
○5において底辺の比も高さの比も$a:b$ になるから，
$\triangle DBE:\triangle ABC=aa:bb=a^2:b^2$

例4
右図において
$\triangle ADE:\triangle ABC=4:9$
$\triangle ADE$:(四角形)$DBCE=4:(9\text{-}4)=4:5$



【まとめ】
(1) 右図9ののように2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．（右の図9では高さの比を$m:n$ と読む．）

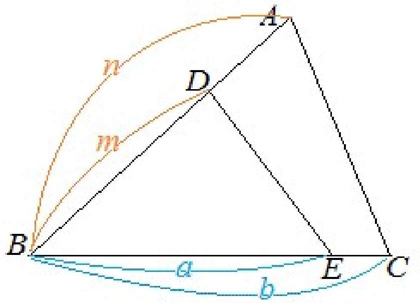
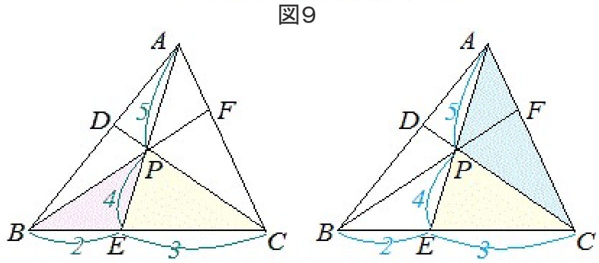


図9

(2) 右図10のような図形において，3つ以上の三角形の面積を比較するときは，次のように「比の値」を「分数」にすると簡単にできる．



$$\frac{\triangle BEP}{\triangle CEP}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{\triangle CEP}{\triangle CAP}=\frac{4}{5}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle BEP}{\cancel{\triangle CEP}}\ \frac{\cancel{\triangle CEP}}{\triangle CAP}=\frac{2}{3}\ \frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$\triangle BEP:\triangle CAP=8:15$

図10

例題1

右図11において

(1)　$\triangle BEP:\triangle CEP=6:5$

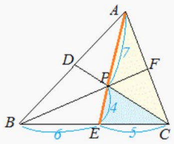
　　高さが等しく，底辺が6:5と見る

(2)　$\triangle ABC:\triangle PBC=11:4$

　　底辺が等しく，高さが11:4と見る

(3)　$\triangle APC:\triangle PEC=7:4$

　　右図のようにAP，PE を底辺とみると，高さが等しく，底辺が7:4



(4)　$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPE}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{\triangle BPE}{\triangle BPC}=\frac{6}{11}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPE}}\,\frac{\cancel{\triangle BPE}}{\triangle BPC}=\frac{7}{4}\,\frac{6}{11}=\frac{42}{44}=\frac{21}{22}$$

$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

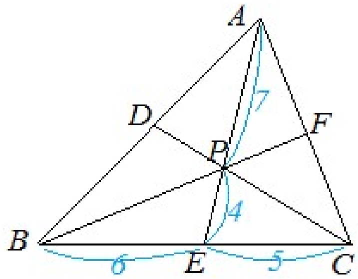


図11

例題2

右図12において

(1)　$\triangle APB:\triangle BPC=4:5$

　　高さが等しく，底辺が4:5と見る

(2)　$\triangle BPC:\triangle CPD=3:7$

　　高さが等しく，底辺が3:7と見る

(3)　$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPC}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\triangle BPC}{\triangle CPD}=\frac{3}{7}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPC}}\,\frac{\cancel{\triangle BPC}}{\triangle CPD}=\frac{4}{5}\,\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$$

$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

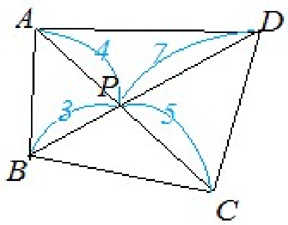


図12

例題3

右図13の平行四辺形$ABCD$ において

(1)　$\triangle ABQ\backsim\triangle FDQ$（相似比は9:3=3:1）だから

　　$\triangle ABQ:\triangle FDQ=3^2:1^2=9:1$

　　$\triangle ABP:\triangle ABQ=4:9$（高さが等しく底辺が4:9）

　　ゆえに $\triangle ABP:\triangle FDQ=4:1$

(2)　$\triangle BEP\backsim\triangle ADP$（相似比は4:8=1:2）だから

　　$\triangle BEP:\triangle ADP=1:4$

　　$\triangle APQ:\triangle APD=5:8$（高さが等しく底辺が5:8）

　　ゆえに

　　$\triangle BEP:\triangle APQ=\frac{1}{4}:\frac{5}{8}=2:5$

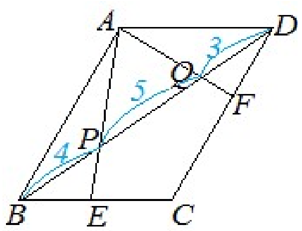


図13

例題4

右図14の平行四辺形$ABCD$ において

(1)

　$\triangle APE\backsim\triangle CPB$（相似比は $AP:PC=2:7$）

　$EP:PB=2:7$

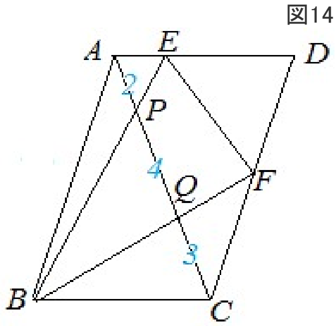
　$\triangle APE$ と$\triangle APB$ は高さが等しく底辺が $2:7$

　　$\triangle APE:\triangle APB=2:7$

(2)

$$\frac{\triangle APE}{\triangle CPB}=\frac{4}{49}$$ ← 相似比2:7の相似図形

図14



(2)の別解

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}=\frac{2}{7}$$ ←(1)の結果

$$\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ ← 高さが等しく底辺が2:4

ゆえに

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}\,\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{7}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{7}$$

$\frac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\frac{7}{4}$ ← 高さが等しく底辺が7:4

ゆえに

$\frac{\triangle APE}{\triangle CPB}\frac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\frac{4}{49}\ \frac{7}{4}=\frac{1}{7}$

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

(3)

$\triangle BQA \backsim \triangle FQC$

だから $BQ:QF=AQ:QC=6:3=2:1$

$\triangle CQB$ と$\triangle FQC$ は高さが等しく底辺が $2:1$

$\triangle CQB:\triangle FQC=2:1$

(4)

$\triangle CQF:\triangle FED=7:15$

(5)

$\triangle BQP:\triangle DEF=56:45$

(5)の証明

$\frac{\triangle BQP}{\triangle ABC}=\frac{4}{9}$ ←【まとめ】

$\frac{\triangle DAC}{\triangle DEF}=\frac{14}{5}$ ←【まとめ】

$AP:PC=2:7$ だから$AE:BC=2:7$
したがって$AE:ED=2:5$
$AQ:QC=6:3$ だから$AB:CF=6:3$
したがって$CD:CF=6:3$, $CF:FD=3:3=1:1$

$\triangle ABC=\triangle CAD$ ←平行四辺形だから

ゆえに

$\frac{\triangle BQP}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle DEF}=\frac{4}{9}\ \frac{14}{5}=\frac{56}{45}$

問題1

右図の$\triangle ABC$ において

(1) $\triangle BEP:\triangle CEP=$ 7 : 4 OO
採点する やり直す 解説

(2) $\triangle ABC:\triangle PBC=$ 5 : 2 OO
採点する やり直す 解説

(3) $\triangle APC:\triangle PEC=$ 3 : 2 OO
採点する やり直す 解説

(4) $\triangle BCP:\triangle CAP=$ 11 : 6 OO
採点する やり直す 解説

(4)

≪ここがポイント≫⇒$\triangle BCP$と$\triangle CAP$を直接比較するのが難しいので，それぞれを第3の三角形$\triangle PEC$などと比較します．

問題2

右図の四角形$ABCD$ において対角線 AC , BD の交点を P とする．$AP:PC=1:5$, $BP:PD=4:3$ のとき次の面積比を求めなさい．

(1) $\triangle APB:\triangle CPD=$ 4 : 15 OO
採点する やり直す 解説

(2) $\triangle APD:\triangle CPB=$ 3 : 20 OO
採点する やり直す 解説

(2)

≪ここがポイント≫⇒$\triangle APD$と$\triangle CPB$を直接比較するのが難し

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

(4)の証明

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$ だから

$AE:CB=AP:CP=2:7$

$AE:DA=2:7$（←平行四辺形だから）

$AE:ED=2:5$

$\triangle AQB \backsim \triangle CQF$ だから

$AB:CF=AQ:QC=6:3=2:1$

$DC:CF=2:1$（←平行四辺形だから）

$CF:FD=1:1$

$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD}=\frac{3}{18}$ ←【まとめ】

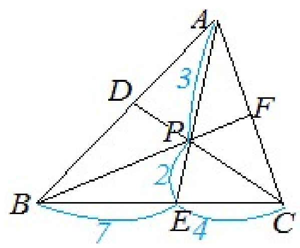
$\frac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\frac{14}{5}$ ←【まとめ】

ゆえに

$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\frac{3}{18}\ \frac{14}{5}=\frac{7}{15}$

だから

$\triangle CQF:\triangle FED=7:15$



(1) $\triangle BEP$ と$\triangle CEP$ は高さが等しく，底辺が$7:4$ だから

$\triangle BEP:\ \triangle CEP=7:4$

(2) $\triangle ABC$ と$\triangle PBC$ は底辺が等しく，高さが$5:2$ だから

$\triangle ABC:\ \triangle PBC=5:2$

(3) $\triangle APC$ と$\triangle PEC$ の底辺を各々AP , PE と見ると，高さが等しく，底辺が$3:2$ だから

$\triangle APC:\ \triangle PEC=3:2$

(4)

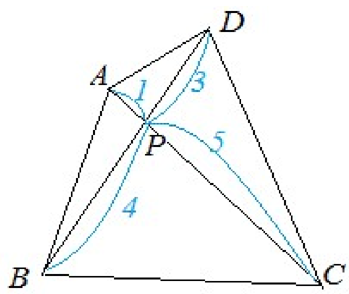
$\frac{\triangle BCP}{\triangle ECP}=\frac{11}{4}$

$\frac{\triangle ECP}{\triangle CAP}=\frac{2}{3}$

ゆえに

$\frac{\triangle BCP}{\cancel{\triangle ECP}}\frac{\cancel{\triangle ECP}}{\triangle CAP}=\frac{11}{4}\ \frac{2}{3}=\frac{22}{12}=\frac{11}{3}$

$\triangle BCP:\triangle CAP=11:6$



(1) $\triangle APB:\triangle APD=4:3$

$\frac{\triangle APB}{\triangle APD}=\frac{4}{3}$

$\triangle APD:\triangle CPD=1:5$

$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD}=\frac{1}{5}$

$\frac{\triangle APB}{\triangle APD}\frac{\triangle APD}{\triangle CPD}=\frac{4}{3}\ \frac{1}{5}$

$\frac{\triangle APB}{\triangle CPD}=\frac{4}{15}$

(2) $\triangle APD:\triangle CPD=1:5$

いので，それぞれを第3の三角形$\triangle CPD$などと比較します．

$$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD}=\frac{1}{5}$$

$\triangle CPD:\triangle CPB=3:4$

$$\frac{\triangle CPD}{\triangle CPB}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD}\frac{\triangle CPD}{\triangle CPB}=\frac{1}{5}\frac{3}{4}$$

$$\frac{\triangle APD}{\triangle CPB}=\frac{3}{20}$$

問題3

右図の平行四辺形$ABCD$において対角線ACを$4:5:6$に分ける点を順にP，Qとするとき，次の面積比を求めなさい．

(1) $\triangle EPA:\triangle DPC=$ 16 : 121 ○○

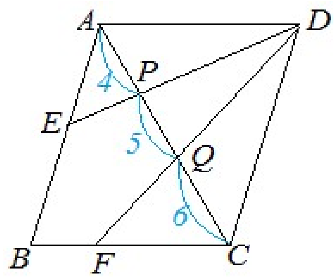
採点する やり直す 解説

(2) $\triangle EPA:\triangle DPQ=$ 16 : 55 ○○

採点する やり直す 解説

(3) $\triangle CQF:\triangle PQD=$ 4 : 5 ○○

採点する やり直す 解説



(1) $\triangle EPA\backsim\triangle DPC$で相似比が$4:11$だから面積比は

$4^2:11^2=16:121$

(2) (1)より

$$\frac{\triangle EPA}{\triangle DPC}=\frac{16}{121}$$

$\triangle DPC:\triangle DPQ=11:5$

$$\frac{\triangle DPC}{\triangle DPQ}=\frac{11}{5}$$

$$\frac{\triangle EPA}{\triangle DPC}\frac{\triangle DPC}{\triangle DPQ}=\frac{16}{121}\frac{11}{5}$$

ゆえに $\dfrac{\triangle EPA}{\triangle DPQ}=\dfrac{16}{55}$

(3)

≪ここがポイント≫⇒直接比較するのは難しいので，各々の三角形を第3の三角形$\triangle AQD$と比較します．（ここまで順に解いてくれば，類推で分かると期待しましたが，形が似ていないと類推が働かないのかもしれません）

(2)

$$\frac{\triangle CQF}{\triangle AQD}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$$ ← 相似比6:9の相似図形

$$\frac{\triangle AQD}{\triangle PQD}=\frac{9}{5}$$ ← 高さが等しく底辺が9:5

ゆえに

$$\frac{\triangle CQF}{\triangle AQD}\frac{\triangle AQD}{\triangle PQD}=\frac{4}{9}\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$$

だから $\triangle CQF:\triangle PQD=4:5$