== 数列,関数の極限 ==

※正しい 番号 をクリックしてください．

平成16年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−1

発散する（収束しない）数列は，次のどれか．

1 $\left\{\frac{n-1}{n^2+1}\right\}$　2 $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$　3 $\left\{1+(-1)^n\right\}$

4 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$　5 $\left\{\frac{\sin n\theta}{n}\right\}$

○ 解説

1について
分母→∞，分子→∞のときは，各々を最大項でくくるとよい

$$\frac{n-1}{n^2+1}=\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{n}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\rightarrow 0\times 1=0$$

2について
根号を含む場合，「分母の無理化」（分子の有理化）が有効なことがある

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(n+1)-(n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\rightarrow 0$$

3について
$(-1)^n$ は
（1） n が偶数のとき，1
（2） n が奇数のとき，-1
となる．したがって，$1+(-1)^n$ は
（1） n が偶数のとき，2
（2） n が奇数のとき，0
となって，どこまで行っても値の範囲が小さくならない（振動する）から → 収束しない

4について
次の極限値は，自然対数の底の定義となっており，重要な極限として覚えておく必要がある

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\ (e=2.71828...)$$

5について
次の極限は，$x\to 0$ の場合のもので，この問題とは関係ないことに注意

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

この問題では，分子は $-1\leqq\sin n\theta\leqq 1$ であるのに対して，分母は $n\to\infty$ となるから

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

→ 3

〇この頁に登場する【問題】は，公益社団法人日本技術士会のホームページに掲載されている「技術士第一次試験過去問題 共通科目Ａ 数学」の引用です．（=公表された著作物の引用）

〇【解説】は個人の試案ですが，Web教材化にあたって「問題の転記ミス」「考え方の間違い」「プログラムの作動ミス」などが含まれる場合があり得ます．
問題や解説についての質問等は，原著作者を煩わせることなく，当Web教材の作成者（<浅尾>mwm48961@uniteddigital.com）に対して行ってください．

平成17年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−3

2つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，次の命題のうち正しいものはどれか．

1 $a_n<b_n\ (n=1,2,3,...)$ ならば $\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$ である

2 数列 $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束する．

3 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ である．

4 数列 $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束するならば，数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束する．

5 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$ ならb $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ である．

○ 解説

1について
有限の n について，$a_n<b_n$ のとき，
$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$ となる場合と $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ となる場合があり，一般には $\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\lim_{n\to\infty}b_n$ となる．
したがって，$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$ とはいえない．
≪不等号が成り立たない例≫
$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$ のとき，
$a_n<b_n$ であるが，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

2について
≪成り立たない例≫
$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$ のとき，
$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$ であるが
$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ となる

3について
≪成り立たない例≫
$a_n=n^2$, $b_n=n$ のとき，
$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ であるが
$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}n(n-1)=\infty$ となる

4について
≪成り立つ：証明≫
$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$ （α,β は有限確定値）のとき，
（収束する数列の和や差は収束するから）
$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta-\alpha$
となる

5について
≪成り立たない例≫

$a_n=n^2,\ b_n=n$ のとき,

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} n(n-1)=\infty$ であるが

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ となる

→ 4

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−1

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+ax-b}{x^2}=2$ が成立する a, b の値は,次のどれか.

ただし,e は自然対数の底とする.

1 $a=0,\ b=0$ 2 $a=1,\ b=0$ 3 $a=-1,\ b=1$
4 $a=2,\ b=1$ 5 $a=-2,\ b=1$

○ 解説

(必要条件で値を絞る)
分母→ 0 であるとき,有限確定の極限をもつためには,分子 → 0 が必要条件になる.
したがって,(分子)→ $1-b=0$

$b=1$ …(1)

(1)を原式に代入すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+ax-1}{x^2}=2$$

次に,左辺に

【ロピタルの定理】
$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ の近傍で微分可能で
$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ のとき
$\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば
$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ

を適用する.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+a}{2x}=2$$

より,分母→ 0 であるとき,有限確定の極限をもつためには,分子→ 0 が必要条件になる.
したがって,(分子)→ $2+a=0$

$a=-2$ …(2)

(十分条件を満たすことを示す)
$a=-2,\ b=1$ のとき,元の極限値が実際に 2 となることは,次のようにして示せる.

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$ (分母→ 0,分子→ 0)

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2}{2x}$ (分母→ 0,分子→ 0)

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{4e^{2x}}{2}=2$ → 5

平成19年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−1

次の数列のうち,収束するものはどれか.ただし,対数は自然対数とする.

1 $\left\{\log\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2 $\left\{\dfrac{(-2)^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 3 $\left\{2+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

4 $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 5 $\left\{\cos n\pi\right\}_{n=1}^{\infty}$

○ 解説

1について

$\log\dfrac{1}{n}=\log 1-\log n=-\log n$

$n\to\infty$ のとき $-\log n\to-\infty$: 収束しない

2について

$n\to\infty$ のとき

分子は有限で,分母→∞だから,分数→ 0 : 収束する

3について

$(-1)^n$ は

(1) n が偶数のとき,1

(2) n が奇数のとき,-1

となる.したがって,$2+(-1)^n$ は

(1) n が偶数のとき,3

(2) n が奇数のとき,1

となって,どこまで行っても値の範囲が小さくならない(振動する)から → 収束しない

4について

分母→∞,分子→∞のときは,各々を最大項でくくるとよい

$$\frac{n^2}{n+1}=\frac{n^2}{n(1+\frac{1}{n})}=n\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to\infty$$: 収束しない

5について

$\cos n\pi$ は

(1) n が偶数のとき,1

(2) n が奇数のとき,-1

となる.したがって,どこまで行っても値の範囲が小さくならない(振動する)から → 収束しない

→ 2

平成20年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−1

極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$ は,次のどれか.

1 -2 2 -1 3 0 4 1 5 2

○ 解説

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)$

ここで $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ だから

$\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=-1$ → 2

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−1

極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ は,次のどれか.

1 0 2 $\dfrac{1}{6}$ 3 $\dfrac{1}{3}$ 4 1 5 ∞

○ 解説

【ロピタルの定理】
$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ の近傍で微分可能で
$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=0$ のとき
$\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ

ロピタルの定理を適用する

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

→ 2

平成22年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−1

極限値 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ は，次のどれか．ただし，e は自然対数の底とする．

1 0　2 $\frac{1}{4}$　3 $\frac{1}{2}$　4 $\frac{3}{4}$　5 1

○ 解説

ロピタルの定理を適用する

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

※循環論法という疑いを持たれないためには，この段階で指数関数に関する重要な極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

を利用する方がよいが，この問題のような選択問題においては，途中経過は採点されないので，次のように，さらにロピタルの定理を適用して，楽な計算にしても結果は同じになる

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$ → 3

平成23年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−1

$0<a<b$ のとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ は，次のどれか．

1 a　2 b　3 $2a$　4 $2b$　5 0

○ 解説

分母，分子を各々の最大項でくくるとよい

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{b^{n+1}(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}+1)}{b^n(\frac{a^n}{b^n}+1)}=b\times\frac{\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}+1}{\frac{a^n}{b^n}+1}$$

ここで，$0<a<b$ のとき，$0<\frac{a}{b}<1$ だから

$$(\frac{a}{b})^n\to 0,\ (\frac{a}{b})^{n+1}\to 0$$

したがって，原式の極限は b → 2

平成24年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−1

極限値 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ は，次のどれか．

1 $-\frac{1}{2}$　2 $-\frac{1}{6}$　3 0　4 $\frac{1}{6}$　5 $\frac{1}{2}$

○ 解説

平成21年度と同じ問題である（選択肢は異なる組合せ）．重要問題は何度でも出るということか？

ロピタルの定理を適用する

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

→ 4