=== 2次関数の入試問題1 ===

【ポイント1】
なるべく軽い変形を考える

引用元の問題は記述式の問題ですが，以下の問題ではWeb画面上での操作性をよくするため，選択問題に変えています．
まぐれ当たりでは力が付きませんので，計算用紙を使って，よく考えてから選択肢の内の1つをクリックしてください．解答すれば解説が出ます．
なお，答案はこの教材の筆者が作成したものです．間違い等がありましたらお知らせください．

【問題1】

[1]
放物線 $y=-x^2+6x+3$ の頂点の座標は（ ア , イ ）である．

（東海大2014年度）

○ 解説 やり直す

$(-3,-6)$　$(-3,9)$　$(3,-6)$　$(3,12)$　$(6,9)$

$y=-(x^2-6x)+3$ …(*1)
$=-\{(x-3)^2-9\}+3$ …(*2)
$=-(x-3)^2+9+3$
$=-(x-3)^2+12$
頂点の座標は $(3,\ 12)$

(*1) 定数項は最終的に外に出すので，この段階でかっこ内に入れない方がよい．
(*2) この変形が苦手な人は
$y=-(x^2-6x+9-9)+3$
$=-\{(x-3)^2-9\}+3$
のように先に2乗の展開式を作ってから考えてもよい

[2]
放物線 $y=2x^2+ax+b$ の頂点の座標が $(1,\ 3)$ であるとき，
$a=$ □，$b=$ □ である．

（北海道工業大2011年度）

○ 解説 やり直す

$a=4,\ b=5$　$a=4,\ b=-5$

$a=-4,\ b=5$　$a=-4,\ b=-5$

$y=2(x-1)^2+3$
とおけるから
$y=2(x^2-2x+1)+3$
$=2x^2-4x+5$
$a=-4,\ b=5$

数学的に方針を決めて，算数的に計算するのがよい．
→ 小さな道具でエコに！

下の（別解）のような解き方もあるが，労力は多くなる．

（別解）
$y=2(x^2+\frac{a}{2}x)+b=2\left\{(x+\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{16}\right\}+b$
$=2(x+\frac{a}{4})^2-\frac{a^2}{8}\}+b$
$\begin{cases} -\frac{a}{4}=1 & \cdots(*1) \\ -\frac{a^2}{8}+b=3 & \cdots(*2) \end{cases}$
(*1)より $a=-4$
これを(*2)に代入すると $b=5$

【ポイント2】
2次関数（放物線）の移動は，頂点の移動で捉えられる．

【問題2】

[1]
2次関数 $y=-x^2+2x+3$ のグラフを原点に関して対称に移動し，さらに x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動すると頂点の座標が $(1,\ 1)$ となった．このとき $a=$ セ ，$b=$ ソ である．

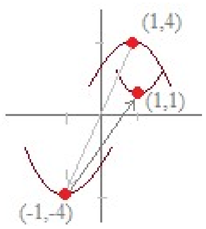
（玉川大2014年度）

○ 解説 やり直す

$a=2,\ b=3$　$a=2,\ b=5$

$a=4,\ b=3$　$a=4,\ b=5$

$y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x)+3$
$=-\{(x-1)^2-1\}+3$
$=-(x-1)^2+4$ …(*1)
の頂点は $(1,\ 4)$



原点に対称に移動すると，頂点は $(-1,\ -4)$ で凹凸は逆になるから
$y=(x+1)^2-4$ …(*2)
平行移動して頂点を $(1,\ 1)$ になるようにすると
$y=(x-1)^2+1$ …(*3)
(*2)から(*3)に移動するには，x 軸方向に 2，y 軸方向に 5 平行移動

※ $y=f(x)$ の「グラフを」点対称移動，平行移動したグラフの方程式

[3]
座標平面上に2つの放物線 $C_1:y=2x^2-4x+3$ と $C_2:y=-2x^2+5x-6$ がある．C_1 を原点に関して対称移動した放物線を C_3 とする．C_2 はどのように平行移動すると C_3 に重なるか．

（北海学園大2016年度）

○ 解説 やり直す

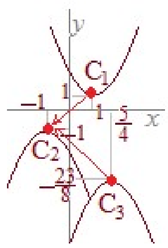
x 軸方向に $-\frac{9}{4}$，y 軸方向に $\frac{15}{8}$

x 軸方向に $\frac{9}{4}$，y 軸方向に $-\frac{31}{8}$

x 軸方向に $-\frac{1}{4}$，y 軸方向に $\frac{31}{8}$

x 軸方向に $\frac{1}{4}$，y 軸方向に $-\frac{15}{8}$

$C_1:y=2(x^2-2x)+3$
$=2\{(x-1)^2-1\}+3$
$=2(x-1)^2+1$
このグラフの頂点の座標は $(1,\ 1)$ で，x^2 の係数は 2（下に凸）…(*1)
C_3 は頂点の座標が $(-1,\ -1)$ で，x^2 の係数は -2（上に凸）…(*2)
$C_2:y=-2(x^2-\frac{5}{2}x)-6$



を求める公式もあるが，この問題のような2次関数の移動は「頂点の移動」と「凹凸の形」で考える方が簡単になる.

[2]
2次関数 $y=-2x^2-2x-3$ のグラフを x 軸に平行に ア イ，y 軸に平行に ウ 移動すると，2次関数 $y=-2x^2-6x-5$ のグラフになる.
（中部大2005年度）

○ 解説 やり直す

x 軸方向に 1，y 軸方向に 2

x 軸方向に 1，y 軸方向に -2

x 軸方向に -1，y 軸方向に 2

x 軸方向に -1，y 軸方向に -2

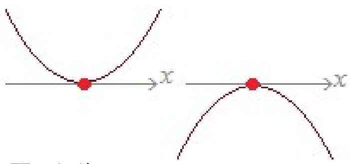
$y=-2x^2-2x-3=-2(x^2+x)-3$
$=-2\left\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right\}-3=-2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-3$
$=-2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{2}$
このグラフの頂点の座標は $(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2})$ …(*1)

$y=-2x^2-6x-5=-2(x^2+3x)-5$
$=-2\left\{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\right\}-5=-2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}-5$
$=-2(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$
このグラフの頂点の座標は $(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2})$ …(*2)

したがって，(*1)から(*2)へ x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 平行移動

$=-2\left\{(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16}\right\}-6$
$=-2(x-\frac{5}{4})^2+\frac{25}{8}-6$
$=-2(x-\frac{5}{4})^2-\frac{23}{8}$
このグラフの頂点の座標は $(\frac{5}{4},\ -\frac{23}{8})$ で，x^2 の係数は -2（上に凸）…(*3)
C_2 から C_3 へは
x 軸方向に $-1-\frac{5}{4}=-\frac{9}{4}$
y 軸方向に $-1-(-\frac{13}{8})=\frac{15}{8}$ の平行移動となる

【ポイント3】
x 軸と接する条件は
（Ⅰ） 数学Ⅰの知識だけで調べるには
頂点の y 座標が 0 になること



（Ⅱ） 数学Ⅱも習った後では
$y=ax^2+bx+c$ に対して
判別式 $D=b^2-4ac=0$

【問題3】

[1]
2次関数 $y=x^2+px+p$ のグラフが x 軸に接するとき，p は ア または イ となる.
（東京工芸大2005年度）

○ 解説 やり直す

$0,\ 2$　　$0,\ -4$　　$0,\ 4$　　$-2,\ 2$　　$-4,\ 4$

（数学Ⅰの範囲で頂点の y 座標を使う場合）
$y=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+p$

[2]
$y=x^2+px+q\ (pq\neq 0)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ を通り，x 軸に接するとき，
$p=$ ウ，$q=$ エ である.
（立教大2011年度）

○ 解説 やり直す

$0,\ 2$　　$0,\ -4$　　$0,\ 4$　　$-2,\ 2$　　$-4,\ 4$

（数学Ⅰの範囲で頂点の y 座標を使う場合）
$(1,\ 1)$ を通るから
$1=1+p+q$
$q=-p$
このとき
$y=x^2+px-p=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}-p$
の頂点の y 座標は
$-\frac{p^2}{4}-p$
だから
$-\frac{p^2}{4}-p=0$
$-p^2-4p=0$
$p^2+4p=0$
$p(p+4)=0$
$p=0,\ -4$

の頂点の y 座標は

$$-\frac{p^2}{4}+p$$

だから

$$-\frac{p^2}{4}+p=0$$
$$-p^2+4p=0$$
$$p^2-4p=0$$
$$p(p-4)=0$$
$$p=0,\ 4$$

（判別式を使う場合）

$$D=p^2-4p=0$$
$$p(p-4)=0$$
$$p=0,\ 4$$

$p,\ q\neq 0$ だから $p=-4$

このとき，$q=4$

（判別式を使う場合）

$(1,\ 1)$ を通るから

$$1=1+p+q$$
$$q=-p$$

$y=x^2+px-p$ について

$$D=p^2+4p=0$$
$$p(p+4)=0$$
$$p=0,\ -4$$

$p,\ q\neq 0$ だから $p=-4$

このとき，$q=4$