== 2次不等式 ==2次関数のグラフが x 軸と2点で交わる場合

○ 初めに2次関数のグラフが谷形になるものについて考えます。

> $y=ax^2+bx+c$ において2次の係数 a が正であるとき、グラフは谷形になります。
> ⇒ $y=ax^2+bx+c$（ただし、$a>0$）は谷形

○ 2次不等式

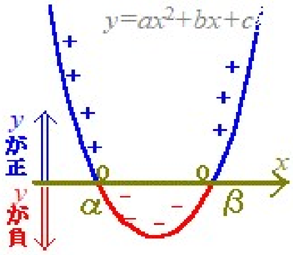
$$ax^2+bx+c<0 \quad （ただし，a>0）$$

は，y の値が ax^2+bx+c の値に等しいグラフ，すなわち

$$y=ax^2+bx+c \quad （a>0）$$

のグラフを利用して解くことができます．

$y=ax^2+bx+c$（$a>0$）のグラフでは
ax^2+bx+c の値は y 座標に等しいので，
$ax^2+bx+c<0$
となるような x の値の範囲は
$y<0$
となるような x の値の範囲となります．（図の赤で示した部分）



$y=ax^2+bx+c$ と x 軸が $x=\alpha,\beta$ で交わるとき
$y<0$（すなわち y が負）となるのは
$\alpha<x<\beta$
のときです．

右上に続く↑

→続き

※2次不等式の解き方を身に付けるためには，まず第1に，思い込みを捨てることが重要です．

○すなわち，これまでに習った1次不等式の解き方では

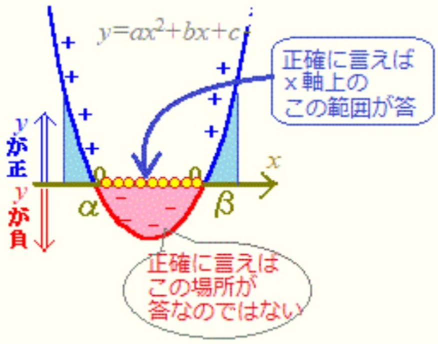
$$2x<3 \to x<\frac{3}{2}$$
$$4x>5 \to x>\frac{5}{4}$$

のように,問題文の不等号の向きと解の不等号の向きが対応しています．x の係数が負の場合は，逆向きになりますが，それでも対応しています．

$$-2x<3 \to x>-\frac{3}{2}$$
$$-4x>5 \to x<-\frac{5}{4}$$

○これに対して，
$x^2-3x+2<0$
のような2次不等式では，問題文の不等号が<であるからといって，解の不等号の向きが
$x<1,\ x<2$
となるのではなく，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフから y の符号が負になるような x の範囲を探すことになります．
$x^2-3x+2>0$
では y の符号が正になるような x の範囲を探すことになります．

> ※ここが核心※
> 不等式 $ax^2+bx+c<0$ で求めているのは y の値の範囲ではなく、x の値の範囲です。（この式の変数は x だけ）
>
> ここで2次関数 $y=ax^2+bx+c$ を考えると、右辺は上の不等式の左辺の値となっています。
> したがって、2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の y の値は上の不等式の左辺の値になります。
>
> そこで、2次関数のグラフを利用して、「y の値（符号）が負になる」ような「x の値の範囲」を求めるということです。



→続き

同様にして
$ax^2+bx+c>0 \ (a>0)$
$ax^2+bx+c \leqq 0 \ (a>0)$
$ax^2+bx+c \geqq 0 \ (a>0)$
も解けます．

右上に続く↑

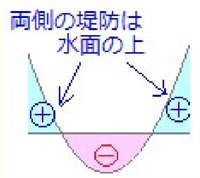
《要約》

$ax^2+bx+c=0$ の解が $x=\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ のとき

問題が$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$なら,

答は$\alpha<x<\beta$
マイナスは「間」

問題が$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$なら,

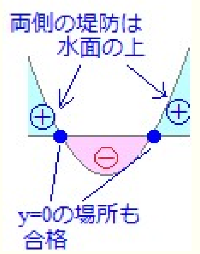


答は$x<\alpha,\ \beta<x$
プラスは「両側」

問題が$ax^2+bx+c\leqq 0$ $(a>0)$なら,

答は$\alpha\leqq x\leqq\beta$
マイナスは「間」
等号付き

問題が$ax^2+bx+c\geqq 0$ $(a>0)$なら,



答は$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$
プラスは「両側」
等号付き

[例1]

2次不等式 $x^2-x-12<0$ を解け。

(答案)

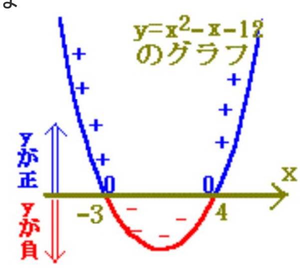
2次方程式 $x^2-x-12=0$ を解くと

$(x+3)(x-4)=0$ より

$x=-3,\ 4$

「2次不等式の問題なのに」問われていない「2次方程式」について演説を始めることが重要

2次関数 $y=x^2-x-12$ のグラフは



「2次不等式の問題なのに」問われていない「2次関数」を描くことが重要
グラフを描くためには、上で求めたx軸との交点の座標が必要になる…この問題を解くためには、頂点の座標などの正確な情報は不要。

グラフから、$y<0$ すなわち
2次不等式 $x^2-x-12<0$ を満たす x の値の範囲は

$-3<x<4$ …(答)

ここでようやく「2次不等式」の話に戻る。
マイナスになるのは「間(サンドイッチ)」が答

[例2]

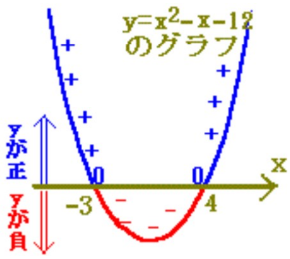
2次不等式 $x^2-x-12\geqq 0$ を解け。

(答案)

2次方程式 $x^2-x-12=0$ を解くと

$x=-3,\ 4$

2次関数 $y=x^2-x-12$ のグラフは



例1と同様に、「不等式の問題を解くためには2次関数のグラフが必要、2次関数のグラフを描くためには2次方程式の解が必要」と考える。
したがって、問われていなくても「2次方程式」→「2次関数」→「2次不等式」の順に述べることが重要。

グラフから、$y\geqq 0$ すなわち
2次不等式 $x^2-x-12\geqq 0$ を満たす x の値の範囲は

$x\leqq -3$, $4\leqq x$ …(答)

プラスになるのは「両側」が答

※ 問題に等号が付いているから、答にも等号を付ける。

論理的に同じ内容を表して

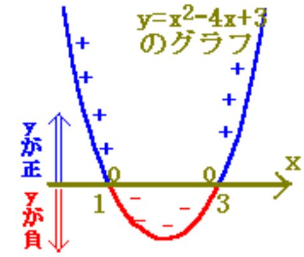
よくある#とんでもない答案#
この問題の答を $4\leqq x\leqq -3$ と書いてはいけない。
(4 が -3 よりも小さいという

いれば、次にように書いてもよい。
$x \leqq -3$, $x \geqq 4$
　筆者は、小さいものから大きいものへ左から順に並べていく書き方が「分かりやすく」「間違いにくい」と考える。

ことはない。そもそも、$4 \leqq x$ と $x \leqq -3$ の両方を満たすような x はなく、この問題の答となる x は2つの部分に分かれている。）
　一般に、「両側」形の範囲は、$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の形にはまとめられない。

【問題】
グラフを参考にして，2次不等式の解を選びなさい．
（右から正しい選択肢をクリック）

(1)



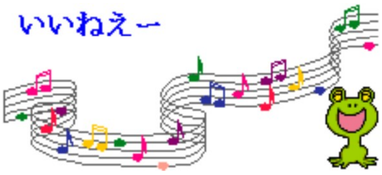
2次不等式
$x^2-4x+3<0$ の解は

$1<x,\ 3<x$

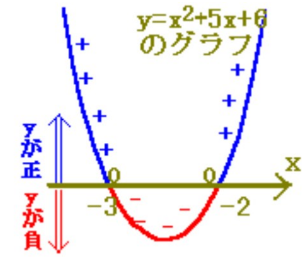
$x<1,\ x<3$

$1<x<3$

$x<1,\ 3<x$



(2)



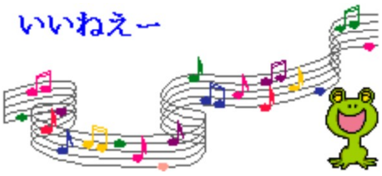
2次不等式
$x^2+5x+6>0$ の解は

$-3<x,\ -2<x$

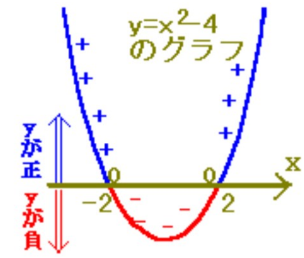
$x<-3,\ x<-2$

$-3<x-2$

$x<-3,\ -2<x$



(3)



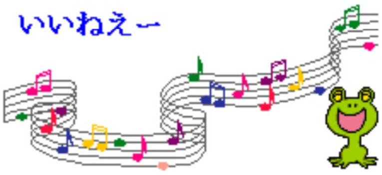
2次不等式
$x^2-4 \geqq 0$ の解は

$x \geqq \pm 2$

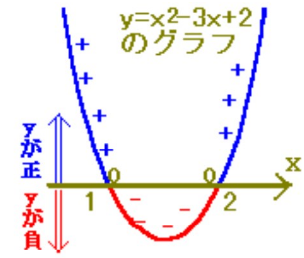
$x \leqq \pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$

$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$



(4)



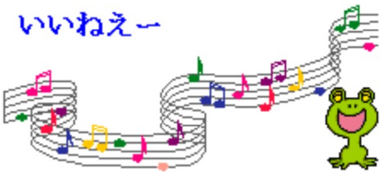
2次不等式
$x^2-3x+2 \leqq 0$ の解は

$x \geqq 1, x \geqq 2$

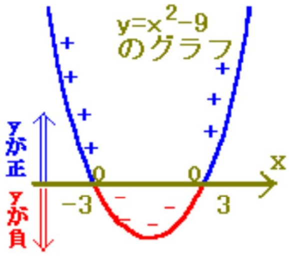
$x \leqq 1, x \leqq 2$

$1 \leqq x \leqq 2$

$x \leqq 1, 2 \leqq x$



(5)



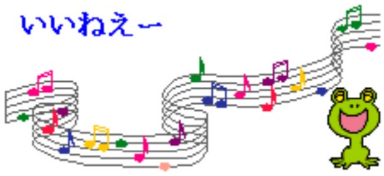
2次不等式
$x^2 \leqq 9$ の解は

$x \geqq \pm 3$

$x \leqq \pm 3$

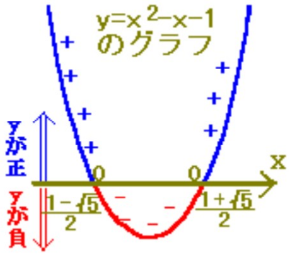
$-3 \leqq x \leqq 3$

$x \leqq -3,\ 3 \leqq x$



$x^2 \leqq 9$ の見かけに引きずられて、$x \leqq \pm 3$ と答える答案が多いが、それは間違い。
あくまで、方程式 $x^2=9$ すなわち $x^2-9=0$ の解 $x=\pm 3$ の「間」を答えること。

(6)



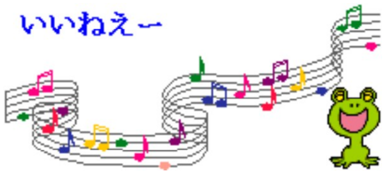
2次不等式
$x^2-x-1 \leqq 0$ の解は

$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \leqq x$

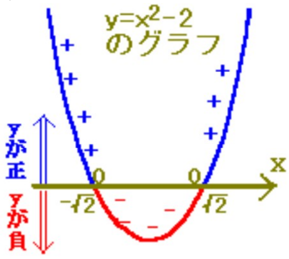
$x \leqq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x \leqq \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq x$



(7)



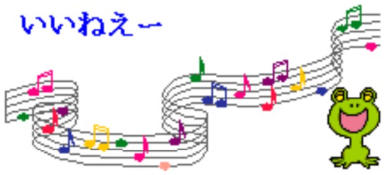
2次不等式
$x^2-2>0$ の解は

$x > \pm\sqrt{2}$

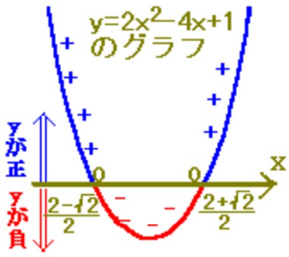
$x < \pm\sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$x < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < x$



(8)



2次不等式
$2x^2-4x+1 \leqq 0$ の解は

$\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \leqq x$

$x \leqq \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$x \leqq \frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} \leqq x$