

== 確率の乗法定理 ==

■条件つき確率の定義式

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

※事象Bが起こる確率[単なる(普通の)確率]は、集合Bの要素の個数 $n(B)$ を全体集合Uの要素の個数 $n(U)$ で割った分数で定義されます。

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{n(B)}{N}$$

これに対して、「事象Aが起こったという条件のもとで事象Bが起こる確率」「事象Aが起こったということが分かっているときに、さらに事象Bが起こる確率」は「AのもとでBが起こる条件付確率」と呼ばれ、 $P_A(B)$ で表されます。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{N}}{\frac{n(A)}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

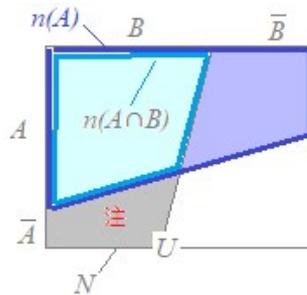
※この定義において、事象Aが起こったと分かっている場合なので、上の図の灰色で示した注という箇所は、この条件付確率 $P_A(B)$ の分母にも分子にも入っていないことに注意しましょう。

分母を払って変形すると、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

になります。この式を確率の乗法定理といいます。

※ 確率の乗法定理は、3つ以上の事象についても順次掛けていけば成り立ちます。



【例1】

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、Xが当り、Yがはずれる確率

(解答)

Xが当たりくじを引くという事象をAで、Yがはずれくじを引くという事象をBで表わすと

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

Xが当たりくじを引いたとき、残り4個のくじの中に当り1個、はずれ3個となるから、

$$P_A(B) = \frac{3}{4}$$

ゆえに、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10}$$



【例2】

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、XとYのどちらが有利か。

(解答)

Xが当たる確率は  $\frac{2}{5}$  …(1)

Yが当たるのは、「Xが当たってYも当たる場合」と「XがはずれてYが当たる場合」がある。

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5} \dots(2)$$

(1)(2)は等しいので、X、Yの当たる確率は等しい。先に引いた人が当たるのを見たら後に引く人は当たりにくくなり、先に引いた人がはずれるのを見たら後に引く人は当たりやすくなるが、

※重要※

始めの時点で考えれば、

「くじに当たる確率は、引く順序に関係ない。」

《問題1》

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないものとするとき、Xがはずれくじを引きYが当りくじを引く確率を求めよ。

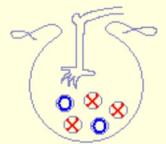


$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

《問題2》

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、少なくとも1人が当りくじを引く確率を求めよ。



$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

《問題3》

袋の中に白玉2個、赤玉3個、黄玉4個の計9個の球が入っている。A、Bがこの順に球を1個ずつ取り出し、取り出した玉は元に戻さないものとする。このとき、AとBが同じ色の玉を取り出す確率を求めよ。



$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

---

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

《問題4》(むずかしい)

特大、大、中、小の4個のさいころを投げるとき、出た目の和が20になる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

---

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

《問題5》(むずかしい)

A、B、Cの3人で2回ジャンケンをし、1回目に負けた者は2回目のジャンケンに加われないものとする。ジャンケンを2回するとき、2回目のジャンケンでAが1人勝ちになる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

---

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

《問題6》(むずかしい)

A、B、Cの3人でジャンケンをし、負けた者は次回以降のジャンケンに加われないものとする。3回までジャンケンできるとき、3回目までに勝者が1人に絞られる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

---

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$



