

== 確率の乗法定理 ==

■条件つき確率の定義式

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

※事象Bが起こる確率[単なる(普通の)確率]は、集合Bの要素の個数 $n(B)$ を全体集合Uの要素の個数で割った分数で定義されます。

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{n(B)}{N}$$

これに対して、「事象Aが起こったという条件のもとで事象Bが起こる確率」「事象Aが起こったということが分かっているときに、さらに事象Bが起こる確率」は「AのもとでBが起こる条件付確率」と呼ばれ、 $P_A(B)$ で表されます。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{N}}{\frac{P(A)}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

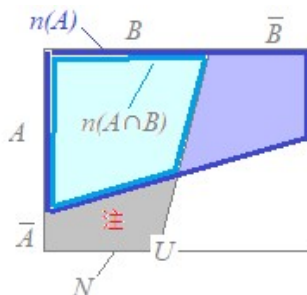
※この定義において、事象Aが起こったと分かっている場合なので、上の図の灰色で示した注という箇所は、この条件付確率 $P_A(B)$ の分母にも分子にも入っていないことに注意しましょう。

分母を払って変形すると、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

になります。この式を確率の乗法定理といいます。

※ 確率の乗法定理は、3つ以上の事象についても順次掛けていえば成り立ちます。



【例1】

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、Xが当り、Yがはずれる確率

(解答)

Xが当たりくじを引くという事象をAで、Yがはずれくじを引くという事象をBで表わすと

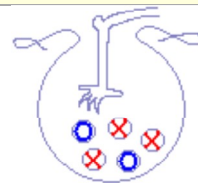
$$P(A) = \frac{2}{5}$$

Xが当たりくじを引いたとき、残り4個のくじの中に当り1個、はずれ3個となるから、

$$P_A(B) = \frac{3}{4}$$

ゆえに、

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10}$$



【例2】

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、XとYのどちらが有利か。

(解答)

Xが当たる確率は $\frac{2}{5}$ …(1)

Yが当たるのは、「Xが当たってYも当たる場合」と「XがはずれてYが当たる場合」がある。

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5} \dots (2)$$

(1)(2)は等しいので、X、Yの当たる確率は等しい。先に引いた人が当たるのを見たら後に引く人は当たりにくくなり、先に引いた人がはずれるのを見たら後に引く人は当たりやすくなるが、

※重要※

始めの時点で考えれば、

「くじに当たる確率は、引く順序に関係ない。」

《問題1》

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないものとすると、Xがはずれくじを引きYが当りくじを引く確率を求めよ。



$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

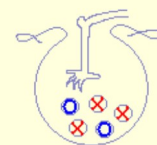
○ 解説

初めXがはずれくじを引く確率は $\frac{3}{5}$

Xがはずれくじを引いたとき、残り4本中当りくじは2本: $\frac{2}{4}$

《問題2》

袋の中に当りくじ2個、はずれくじ3個、合計5個のくじが入っている。X、Yの2人がこの順にくじを1個ずつ引き、引いたくじは元に戻さないとき、少なくとも1人が当りくじを引く確率を求めよ。



$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

○ 解説

(考え方1)

XもYも当たる確率: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$, Xが当りYははずれる確率: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, XがはずれYは当たる確率: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

《問題3》

袋の中に白玉2個、赤玉3個、黄玉4個の計9個の球が入っている。A、Bがこの順に球を1個ずつ取り出し、取り出した玉は元に戻さないものとする。このとき、AとBが同じ色の玉を取り出す確率を求めよ。



$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

○ 解説

白→白 $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$, 赤→赤 $\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$, 黄→黄 $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$

排反事象の加法定理でこれらを加えます

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

《問題5》(むずかしい)

A、B、Cの3人で2回じゃんけんをし、1回目に負けた者は2回目のじゃんけんに加われないものとする。じゃんけんを2回するとき、2回目のじゃんけんがAが1人勝ちになる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

○ 解説

1回目(3人の手の出し方: 3^3 通り)3人がアイコ→2回目(3人の手の出し方: 3^3 通り)Aの1人勝ち

同じ手: ぐぐぐ, ばばば, ちちち → 3通り
3すくみ: ぐちば, ぐばち, ちばぐ, ちぐば, ばちぐ, ばぐち → 6通り

$$\frac{6+3}{3^3} \times \frac{3}{3^3} = \frac{1}{27}$$

1回目Aを含む2人勝ち→2回目Aの勝ち

A B C
ぐぐち Aが勝つ
ぐちぐ
ちちば
ちばち

排反事象の加法定理によりこれらを加えると

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

(考え方2)

余事象の定理を用いる: $1 - (2人ともはずれる確率) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

《問題4》(むずかしい)

特大、大、中、小の4個のさいころを投げるとき、出た目の和が20になる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

○ 解説

$x+y+z+w=20$, $x, y, z, w \geq 1$ だけならば重複組合せの問題として解けますが(重複を許して4個の名前を16回呼ぶ)

$x, y, z, w \leq 6$ の取り扱いが大変ですので別の方法を考えます。2つつづき組み合わせで特大-大の組, 中-小の組について出た目の和を表にすると、次の組合せが題意を満たします。

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

5	1	4	2	3	3	2	4	1	5
36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
5	8	9	8	5					
$\frac{35}{1296}$									

《問題6》(むずかしい)

A、B、Cの3人でじゃんけんをし、負けた者は次回以降のじゃんけんに加われないものとする。3回までじゃんけんできるとき、3回目までに勝者が1人に絞られる確率を求めよ。

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{7}{10}$$

$$\frac{5}{18} \quad \frac{6}{25} \quad \frac{23}{27} \quad \frac{323}{432} \quad \frac{35}{1296}$$

○ 解説

OA 3人でアイコになる確率

【起こり得るすべての場合の数】 $N=3^3=27$ 通り

【アイコとなる場合1】 3人とも同じ手の出し方=3通り

【アイコとなる場合2】 3種類の手が全部出る出し方
= $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り

(※以上2つの場合は排反で重なりはない)

以上により、プレーヤーが3人から3人になる確率は

$$p = \frac{3+6}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

OB 3人でじゃんけんして2人残る確率

$$\begin{aligned}
 & 1 - \left(\underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{B \rightarrow D \rightarrow D} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{A \rightarrow B \rightarrow D} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{A \rightarrow B \rightarrow D} + \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}_{A \rightarrow B \rightarrow D} \right) \\
 &= 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}
 \end{aligned}$$