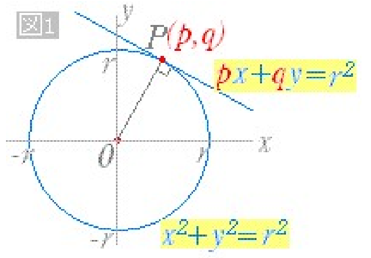
== 円の接線の方程式 ==

【 原点を中心とする円の接線の方程式 】

円 $x^2+y^2=r^2$

の円周上の点 $(p\,,\,q)$ における接線の方程式は

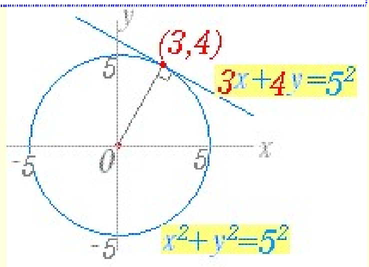
$px+qy=r^2$ …(1)



例1

円 $x^2+y^2=25$ の円周上の点 $(3\,,\,4)$ における接線の方程式は

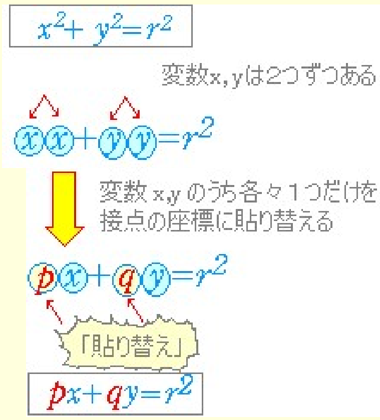
$3x+4y=25$



【要点】

円の方程式：

接線の方程式



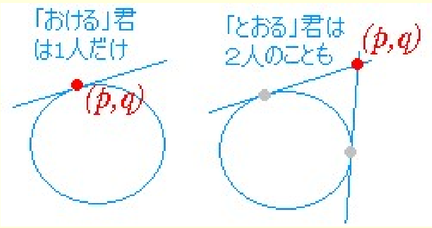
【注意】

※1　変数 $x\,,\,y$ を2つとも貼り替えてしまうと，（変数がなくなって方程式ではなく）単に点 $(p\,,\,q)$ が円周上にあるという事実を示すだけになるので，1つずつ貼り替えることが重要

$p^2+q^2=r^2$ ⇔ 点 $(p\,,\,q)$ は円周上にあるという事実に対応

※2　点 $(p\,,\,q)$ が円周上に「ない」ときは，$px+qy=r^2$ は接線の方程式に「ならない」.（円外の1点を通る接線の方程式はこの方程式ではない．）

※3　点 $(p\,,\,q)$ が接点になっているとき，その接線は「点 $(p\,,\,q)$ における」接線といい，単に「点 $(p\,,\,q)$ を通る」接線と区別する.



点 $(p\,,\,q)$ が円外の1点のときは「点 $(p\,,\,q)$ を通る」接線は2本あり，点 $(p\,,\,q)$ が円周上の1点のときは「点 $(p\,,\,q)$ を通る」接線は1本だけあり，点 $(p\,,\,q)$ が円内の1点のときは「点 $(p\,,\,q)$ を通る」接線はない.

（例の続き）

例2

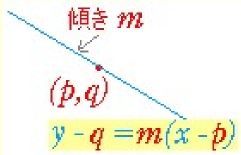
円 $x^2+y^2=5$ の円周上の点 $(1\,,\,2)$ における接線の方程式

（ $(1\,,\,2)$ が円 $x^2+y^2=5$ の周上にあることを確かめておく方がよい ： $1^2+2^2=5$ が成り立つから，円周上にある．）

$x+2y=5$

例3

【公式(1)】の証明 …以下は，多くの教科書で示される解説とほぼ同じ



「点 $(p\,,\,q)$ を通り，傾き m の直線の方程式」という公式を使う.

$y-q=m(x-p)$ …(A)

右図において点 $(p\,,\,q)$ を通ることは分かっているので，あとは傾きを求めて(A)に代入すれば，接線の方程式が求まる.

図(1)において接線は半径 OP に垂直だから，OP の傾きからこれに垂直な直線の傾きを求めればよい.

OP の傾き m_1 は（$p\neq 0$ のとき）

$$m_1=\frac{q}{p}\ \cdots\text{(B)}$$

2つの直線の傾きが各々 $m_1\,,\,m_2$ であるとき，これらが垂直となる条件（2直線の垂直条件）

$m_1\cdot m_2=-1$ …(C)

に注意すると，接線の傾き m_2 は（$q\neq 0$ のとき）

$$m_2=-\frac{p}{q}\ \cdots\text{(D)}$$

(A)に(D)を代入すると,

$$y-q=-\frac{p}{q}(x-p)$$

分母 q を払ってこの式を簡単にすると

$qy-q^2=-p(x-p)$

$px+qy=p^2+q^2$ …(E)

ここで点 $(p\,,\,q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ の円周上の点だから，円の方程式を満たす：

$p^2+q^2=r^2$

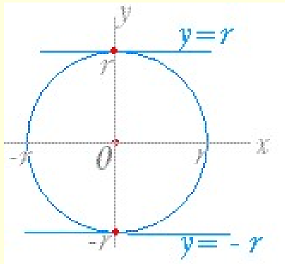
したがって，(E)の右辺は r^2

$px+qy=r^2$ → (1)

【例外の処理1】

(B)において $p=0$ のときは傾きが定義されないので，(B)以下の式はそのままは使えないが，$p=0$ とき，y 軸上の点となって，$q=\pm r$，すなわち，接点の座標は $(0\,,\,r)$ と $(0\,,-r)$ になる.

このとき，右図のように接線は x 軸に平行な直線になり，各々



$y=r$, $y=-r$ となるが，これらは(1)において $(0\,,\,r)$ と $(0\,,-r)$ を形式的に代入したもの

$0x+ry=r^2$, $0x+(-r)y=r^2$ と「結果は一致する」.

【例外の処理2】

(D)において $q=0$ のときも傾きが定義されないので，(D)以下の式はそのままは使えないが，$q=0$ とき，x 軸上の点となって，$p=\pm r$，すなわち，接点の座標は $(r\,,\,0)$ と $(-r,\,0)$ になる.

このとき，接線は y 軸に平行な直線になり，各々

$x=r$, $x=-r$ となるが，これらは(1)において $(r\,,\,0)$ と $(-r\,,\,0)$ を形式的に代入したもの

$rx+0y=r^2$, $-rx+0y=r^2$ と「結果は一致する」.

以上のように(1)の「結果」は，$p=0$ や $q=0$のときも成り立つので，結局(1)は点 $(p\,,\,q)$ が円周上の点であればつねに成り立つ.

■証明終り■

［問題1］　次の空欄を埋めよ.

(1)　　円 $x^2+y^2=13$ の円周上の点 $(3\,,\,2)$ における接線の方程式は 3 $x+$ 2 $y=13$ OO

円 $x^2+y^2=4$ の円周上の点 $(-\sqrt{3}\ ,\ 1)$ における接線の方程式は

$$-\sqrt{3}x+y=4$$

例4

円 $x^2+y^2=9$ の円周上の点 $(0\ ,-3)$ における接線の方程式は

$$0x+(-3)y=9$$

すなわち

$$y=-3$$

$3x+2y=13$

採点する　やり直す　解説

(2)　円 $x^2+y^2=25$ の円周上の点 $(-4\ ,\ 3)$ における接線の方程式は $\boxed{-4}x+\boxed{3}y=25$ ○○

$-4x+3y=25$

採点する　やり直す　解説

(3)　円 $x^2+y^2=1$ の円周上の点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,-\frac{1}{2})$ における接線の方程式は $\sqrt{\boxed{3}}\ x-y=2$ ○

$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1\rightarrow\sqrt{3}\ x-y=2$

採点する　やり直す　解説

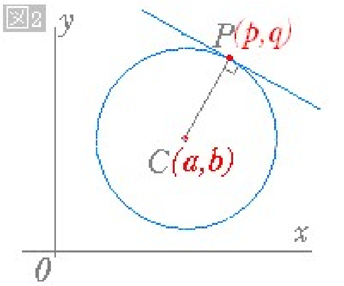
(4)　円 $x^2+y^2=16$ の円周上の点 $(-4\ ,\ 0)$ における接線の方程式は $x=\boxed{-4}$ ○

$-4x+0y=16\rightarrow x=-4$

採点する　やり直す　解説

【一般の円の接線の方程式】

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の円周上の点 $(p\,,\,q)$ における接線の方程式は



$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$ …(2)

例5

円 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ の円周上の点 $(4,\,6)$ における接線の方程式は

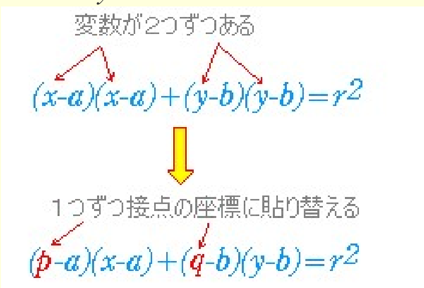
$$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$$

すなわち

$$3(x-1)+4(y-2)=25$$

$$3x+4y=36$$

【要点】



【公式(2)】の証明

図(2)において接線は半径 CP に垂直.

CP の傾きは

$$\frac{q-b}{p-a}\ (\,p\neq a\,)$$

したがって接線の傾きは

$$-\frac{p-a}{q-b}\ (\,q\neq b\,)$$

点 $(p\,,\,q)$ を通り傾き $-\dfrac{p-a}{q-b}$ の直線の方程式は

$$y-q=-\frac{p-a}{q-b}(x-p)$$

分母を払って簡単にすると

$$(q-b)(y-q)=-(p-a)(x-p)$$

$$(q-b)(y-q)+(p-a)(x-p)=0$$

式の形を整えるために次のように変形する

$$(q-b)(y-b+b-q)+(p-a)(x-a+a-p)=0$$

$$(q-b)(y-b)-(q-b)^2+(p-a)(x-a)-(p-a)^2=0$$

$$(q-b)(y-b)+(p-a)(x-a)=(p-a)^2+(q-b)^2$$

ここで点 $(p\,,\,q)$ は円周上の点だから

$$(p-a)^2+(q-b)^2=r^2$$

が成り立つ.

$$(q-b)(y-b)+(p-a)(x-a)=r^2$$

(※ $p=a$ または $q=b$ のときも結果は成り立つ.)

【公式(1)の結果を用いる証明方法】やや難しい

円と接線を x 軸方向に - a, y 軸方向に $-b$ だけ平行移動すると, 円は原点を中心とする半径 r の円になり, 接点は $(p-a\,,\,q-b)$ に移り, この点で円に接している.

できた接線の方程式は $(p-a)x+(q-b)y=r^2$

この接線を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動すると, 求める接線になるから

元の接線の方程式は $(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2$

［問題2］

(1) 円 $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ の円周上の点 $(7\,,\,5)$ における接線の方程式は 4 $x+$ 3 $y=43$ ○○

$$(7-3)(x-3)+(5-2)(y-2)=25$$

$$\rightarrow 4x-12+3y-6=25 \rightarrow 4x+3y=43$$

採点する　やり直す　解説

(2) 円 $(x+4)^2+y^2=10$ の円周上の点 $(-5\,,\,3)$ における接線の方程式は $-x+$ 3 $y=$ 14 ○○

$$(-5+4)(x+4)+3y=10$$

$$\rightarrow -x-4+3y=10 \rightarrow -x+3y=14$$

採点する　やり直す　解説